

ALJABAR- C^* KOMUTATIF

Commutative C^ -algebra*

HARMANUS BATKUNDE

Staf Jurusan Matematika FMIPA UNPATTI

Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon, Maluku

e-mail: batkunde@yahoo.com

ABSTRACT

These notes in this paper will discuss about C^* -algebras commutative and its properties. The theory of algebra- $*$, Banach- $*$ algebra, C^* -algebras and $*$ -homomorphism are included. We also give some examples of commutative C^* -algebras. We shall prove and discuss some important properties of commutative C^* -algebras and $*$ -homomorphism.

Keywords : $*$ -homomorphism, C^* -algebras, commutative C^* -algebras.

PENDAHULUAN

Banyak konsep dalam analisis fungsional maupun aljabar telah memberikan banyak sumbangan dalam pengembangan ilmu matematika, baik yang diterapkan langsung maupun yang memperkaya teori-teori matematika yang terus dipakai dalam pengembangan teori lainnya.

Aljabar- C^* (dibaca: aljabar C bintang/star) adalah salah satu konsep lanjut yang dihasilkan dari tinjauan-tinjauan lanjut dari konsep-konsep pada analisis fungsional dan konsep operator aljabar. Lebih lanjut berbagai teori dasar dari aljabar- C^* akan turut dijelaskan dalam penulisan ini, salah satunya adalah aljabar- C^* komutatif. Beberapa sifat maupun syarat suatu aljabar- C^* dapat dikelompokkan dalam aljabar- C^* komutatif akan dibahas sekaligus akan ditunjukkan beberapa contoh dari aljabar- C^* komutatif.

TINJAUAN PUSTAKA

Penelitian mengenai aljabar- C^* dimulai dengan oleh Werner Heisenberg dan dalam suatu pengembangan lebih lanjut yang lebih matematik dari Pasqal Jordan sekitar tahun 1933. [4]

Selanjutnya John Von Neumann mencoba menyusun kerangka umum aljabar ini yang kemudian diterbitkan dalam kumpulan tulisan pada operator ring. Tulisan ini disebut sebagai kelas khusus dari aljabar- C^* yang dikenal sebagai aljabar Von Neumann. [7]

Sekitar tahun 1940an, C. E. Rickart mendeskripsikan aljabar- B^* yang kemudian dikenal sebagai aljabar Banach- $*$ [9]. Kemudian di tahun yang sama yaitu tahun 1943, penelitian dari Israel Gelfand dan Mark Naimark menghasilkan suatu karakterisasi abstrak dari aljabar- C^* , yang kemudian berlanjut dengan aljabar- C^* komutatif. [3]

Definisi 1. (Ruang norm, ruang Banach)

Misalkan X adalah suatu ruang vektor. Suatu fungsi $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ yang memenuhi:

- 1) $\|x\| \geq 0$; untuk setiap $x \in X$;
 $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$;
- 2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$; untuk setiap $x \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$;
- 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$; untuk setiap $x, y \in X$;

disebut **norm** pada X dan pasangan $(\|\cdot\|, X)$ disebut **ruang norm**. Lebih lanjut, ruang norm yang lengkap (terhadap normnya) disebut **ruang Banach**.

Definisi 2. (Fungsional linear terbatas, ruang dual)

Suatu **fungsional linear** f adalah suatu pemetaan linear dengan domain suatu ruang vektor X dan *range*-nya berupa lapangan K , dengan demikian :

$$f : D(f) \rightarrow K.$$

Di sini, $K = \mathbb{R}/\mathbb{C}$. Jika ada $c \in \mathbb{R}$

sehingga $|f(x)| \leq c\|x\|$ dengan $x \in X$ maka f disebut **fungsional linear terbatas**.

Himpunan semua fungsional linear terbatas di X membentuk suatu ruang norm dengan norm yang didefinisikan oleh

$$\|f\| = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{x \in X, \|x\|=1} |f(x)|.$$

Himpunan ini disebut **ruang dual** dari X dan dinotasikan dengan X^*

Definisi 3. (Aljabar, aljabar komutatif)

Aljabar A atas lapangan K dengan sifat

$$x, y \in A, \text{ maka } xy \in A,$$

yang memenuhi sifat-sifat:

- (1) $(xy)z = x(yz)$;
- (2) $x(y + z) = xy + xz$;
 $(x + y)z = xy + yz$;
- (3) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$;

untuk setiap $x, y, z \in X$ dan $\alpha \in K$. Dalam hal ini $K = \mathbb{R}/\mathbb{C}$.

Lebih lanjut A disebut komutatif jika perkaliannya komutatif, yaitu untuk setiap $xy \in A$ berlaku:

$$xy = yx,$$

dan A disebut aljabar dengan elemen satuan jika terdapat suatu $e \in A$ sehingga untuk setiap $y \in A$ berlaku:

$$ex = xe = x,$$

e merupakan elemen satuan.

Definisi 4. (Aljabar bernorm, aljabar Banach)

Misalkan A adalah suatu ruang norm, jika A adalah aljabar, maka A disebut aljabar bernorm. Dimana A merupakan suatu aljabar, sedemikian hingga untuk setiap $x, y \in A$, berlaku:

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|,$$

dan jika A memiliki elemen satuan e ,

$$\|e\| = 1.$$

Aljabar bernorm yang lengkap (terhadap normnya) disebut **aljabar Banach**.

Definisi 5. (involusi, aljabar-*, aljabar Banach-*)

Suatu pemetaan $*$: $A \rightarrow A$ ($a \mapsto a^*$), dengan A adalah ruang vektor atas lapangan K , disebut **involusi** jika memenuhi sifat:

1. $x^{**} = x$;
2. $(\alpha x + \beta y)^* = \bar{\alpha}x^* + \bar{\beta}y^*$;
3. $(xy)^* = y^*x^*$;

untuk setiap $x, y \in A$ dan $\alpha, \beta \in K$.

Suatu aljabar yang dilengkapi involusi disebut aljabar-* (baca: aljabar bintang/star).

Sedangkan aljabar Banach yang dilengkapi dengan involusi dan memenuhi sifat:

$$4. \|x^*\| = \|x\|,$$

disebut **Aljabar Banach-***.

Definisi 6.

Misalkan A adalah aljabar-*. Maka $x \in A$ disebut

Self-adjoint jika $x = x^*$.

Normal jika $xx^* = x^*x$.

Proyeksi jika x self adjoint dan $x^2 = x$.

Isometri parsial jika x^*x adalah proyeksi.

Isometri jika $x^*x = 1$.

Coisometri jika $xx^* = 1$.

Uniter jika x adalah isometri dan coisometri.

Definisi 7.

Suatu **fungsional linear multiplikatif** pada suatu aljabar Banach tak nol A adalah homomorfisma tak nol dari A ke \mathbb{C} . Himpunan semua fungsional linear multiplikatif pada A disebut **ruang ideal maksimal**, dan dinotasikan dengan $\Omega(A)$.

Teorema 8.

Misalkan A adalah aljabar Banach komutatif dengan elemen satuan,

- 1) Jika $\phi \in \Omega(A)$, maka $\|\phi\| = 1$.
- 2) Ruang $\Omega(A)$ tak kosong, dan pemetaan $\phi \mapsto \ker(\phi)$ adalah suatu bijeksi dari $\Omega(A)$ pada himpunan semua ideal maksimal dari A .

Bukti.

- 1) Andaikan $\phi \in \Omega(A)$ dan $a \in A$ sedemikian hingga $\|a\| < 1 = \phi(a)$. Misalkan $b = \sum_{n=1}^{\infty} a^n$. Maka $a + ab = b$, dan

$$\phi(b) = \phi(a) + \phi(a)\phi(b) = 1 + \phi(b).$$

Hal ini tidaklah mungkin. Jadi, $\|\phi\| \leq 1$. Karena $\phi(1) = 1$, maka terbukti bahwa $\|\phi\| = 1$.

- 2) Misalkan $\phi \in \Omega(A)$, berlaku bahwa $M = \ker \phi$ adalah suatu ideal tutup dari kodimensi 1 pada A , dengan demikian merupakan maksimal. Jika $\phi_1, \phi_2 \in \Omega(A)$ dan $\ker \phi_1 = \ker \phi_2$, maka untuk setiap $a \in A$, $a - \phi_2(a) \in \ker \phi_1$. Hal ini mengakibatkan $\phi_1(a - \phi_2(a)) = 0$ atau $\phi_1(a) = \phi_2(a)$. Ini menunjukkan bahwa pemetaan ini satu-satu. Sebaliknya, jika M adalah ideal maksimal, maka $d(M, 1) \geq 1$ karena bola buka satuan dengan pusat 1, memuat elemen-elemen yang dapat dibalik, sehingga closure dari M tetap tidak memuat 1.

Kemudian, dapat dilihat bahwa closure juga merupakan ideal, lebih lanjut merupakan ideal sejati. Disimpulkan bahwa M sendiri tutup. Jadi kuosien A/M adalah aljabar Banach komutatif sederhana, dan

karena satu-satunya aljabar Banach komutatif sederhana adalah \mathbb{C} maka pemetaan kuosien ϕ memberikan suatu homomorfisma kontinu dari $A \rightarrow \mathbb{C}$. Lebih lanjut, pemetaan ini bijektif.

Untuk melihat bahwa $\Omega(A)$ tak kosong, kita asumsikan $A \neq \mathbb{C}$, (jika tidak, identifikasi A dengan \mathbb{C} menghasilkan homomorfisma tak nol) jadi A tidak sederhana.

Misalkan I adalah suatu ideal sejati dari A . Karena A memiliki identitas, maka terdapat suatu ideal sejati maksimal dari A yang memuat I . ■

Definisi 9. (aljabar $-C^*$)

Suatu aljabar Banach- $*$ yang memenuhi:

$$\|x^*x\| = \|x\|^2,$$

disebut **aljabar $-C^*$** .

Persamaan (6) disebut aksioma- C^* atau kondisi $-C^*$.

Lebih lanjut dapat dilihat bahwa untuk suatu aljabar Banach- $*$ A , involusinya adalah isometrik, yaitu:

$$\|x - y\| = \|(x - y)^*\| = \|x^* - y^*\|.$$

Contoh 10.

1. Diberikan suatu ruang Hilbert kompleks H dan $\mathcal{B}(H)$ adalah himpunan semua operator linier terbatas pada H . $\mathcal{B}(H)$ adalah aljabar- C^* . Lebih lanjut, setiap subaljabar- $*$ dari $\mathcal{B}(H)$ yang tertutup terhadap normnya merupakan aljabar- C^* , aljabar- C^* ini disebut aljabar- C^* konkrit.
2. Misalkan X adalah suatu ruang Hausdorff kompak local dan $C_0(X)$ adalah himpunan semua fungsi-fungsi kontinu yang bernilai 0 saat menuju tak hingga. Definisikan $f^*(t) = \overline{f(t)}$ (untuk $t \in X$). Maka $C_0(X)$ adalah aljabar- $*$. Dengan $\|f\| = \sup_{t \in X} |f(t)|$, $C_0(X)$ adalah aljabar- C^* . Lebih lanjut, $C_0(X)$ memiliki elemen satuan jika dan hanya jika X kompak.

Definisi 11. (Homomorfisma- $*$)

Jika A_1 dan A_2 masing-masing adalah aljabar- C^* , suatu **homomorfisma- $*$** $\phi: A_1 \rightarrow A_2$ adalah suatu homomorfisma aljabar sedemikian sehingga

$$\phi(x^*) = \phi(x)^*, x \in A_1.$$

Lebih lanjut, homomorfisma- $*$ yang bijektif dari A_1 ke A_2 disebut **isomorfisma**.

Proposisi 12.

Jika A adalah aljabar- C^* , maka proyeksi tak nol memiliki norm 1. Lebih lanjut jika x uniter, maka

$$\sigma(x^{-1}) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(x)\}.$$

Bukti.

Jika x adalah proyeksi tak nol, maka $\|x\|^2 = \|x^*x\| = \|x^2\| = \|x\|$, dengan demikian $\|x\| = 1$. Jika x uniter

maka $xx^* = 1$ (ini adalah invertible dengan involusi sebagai inversnya) ■

Proposisi 13.

Terdapat paling banyak satu norm pada suatu aljabar- $*$ A yang membuat A menjadi suatu aljabar- C^* .

Bukti.

Misalkan $\|\cdot\|_1$ dan $\|\cdot\|_2$ adalah dua norm di aljabar- $*$ A yang membuatnya menjadi suatu aljabar- C^* , maka

$$\|x\|_i^2 = \|x^2x\| = \sup \{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x^*x)\}; i = 1, 2.$$

Dengan demikian $\|x\|_1$ dan $\|x\|_2$. ■

Proposisi 14.

Misalkan A adalah suatu aljabar- C^* dan $x \in A$, dimana x self-adjoint, maka $\sigma(x) \subset \mathbb{R}$. Jika $u \in A$ uniter, maka $\sigma(u)$ subhimpunan dari suatu lingkaran satuan.

Bukti.

Misalkan u uniter dalam suatu aljabar- C^* A dengan elemen satuan dan $\lambda \in \sigma(x)$.

Karena $\|u\|^2 = \|u^*u\| = \|1\|$, $|\lambda| \leq 1$. Perhatikan bahwa $\lambda^{-1} \in \sigma(u^{-1})$. Karena $u^{-1} = u^*$ uniter, kita simpulkan bahwa $|\lambda| = 1$. Untuk $x \in A$ uniter, dengan mempertimbangkan \tilde{A} , kita asumsikan A memiliki elemen satuan.

Fungsi $\exp(iz) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!}$. Dapat dilihat bahwa $u = \exp(ix)$ uniter (dengan $u^* = \exp(-ix)$),

Jika $\lambda \in \sigma(x)$ dan $b = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i)^n (x-\lambda)^{n-1}}{n}$, maka

$$\begin{aligned} e^{ix} - e^{i\lambda} &= (e^{i(x-\lambda)} - 1)e^{i\lambda} \\ &= (x - \lambda)be^{i\lambda}. \end{aligned}$$

Karena b komutatif dengan x , dan $x - \lambda$ tidak invertible, $\exp(ix) - e^{i\lambda}$. Dengan demikian $|e^{i\lambda}| = 1$, dan oleh karena itu $\lambda \in \mathbb{R}$. Dengan kata lain, $\sigma(x) \subset \mathbb{R}$. ■

HASIL DAN PEMBAHASAN

Teorema 15.

Misalkan A adalah aljabar Banach komutatif.

1. Jika $\phi \in \Omega(A)$, maka $\|\phi\| = 1$
2. $\Omega(A)$ tak kosong, dan pemetaan $\phi \mapsto \ker(\phi)$ mendefinisikan suatu bijeksi dari $\Omega(A)$ ke himpunan semua ideal maksimal dari A .

Bukti.

1. Andaikan $\phi \in \Omega(A)$ dan $a \in A$ sedemikian sehingga $\|a\| < 1 = \phi(a)$. Misalkan $b = \sum_{n=1}^{\infty} a^n$.

Maka $a + ab = b$, dan

$$\phi(b) = \phi(a) + \phi(a)\phi(b) = 1 + \phi(b).$$

Kontradiksi, jadi $\|\phi\| \leq 1$. Karena $\phi(1) = 1$, dengan demikian terbukti bahwa $\|\phi\| = 1$.

2. Misalkan $\phi \in \Omega(a)$, maka berlaku bahwa $M = \ker(\phi)$ adalah ideal tutup kodimensi 1 dari A , dengan demikian merupakan suatu maksimal.

Jika $\phi_1, \phi_2 \in \Omega(A)$ dan $\ker(\phi_1) = \ker(\phi_2)$, maka untuk setiap $a \in A, a - \phi_2(a) \in \ker(\phi_1)$. Hal ini mengakibatkan $\phi_1(a) = \phi_2(a)$, atau pemetaannya satu-satu.

Sebaliknya, jika M adalah suatu maksimal ideal, maka $(M, 1) \geq 1$. Karena bola buka satuan dengan pusat 1 hanya memuat elemen-elemen yang memiliki invers, maka berlaku bahwa closure dari M tidak termuat.

Perhatikan bahwa closure adalah sebuah ideal, jadi merupakan ideal sejati.

Dengan demikian disimpulkan bahwa M tutup, sehingga A/M adalah suatu aljabar Banach komutatif sederhana.

Diketahui bahwa $A/M = \mathbb{C}$. Jadi pemetaan quotient membrikan suatu homomorfisma dari $A \rightarrow \mathbb{C}$ dengan $\ker(\phi) = M$. Lebih lanjut pemetaan ini bijektif. Selanjutnya dapat dilihat bahwa $\Omega(A)$ tak kosong. ■

Proposisi 16.

Misalkan A adalah aljabar- C^* dan $x \in A$ normal. Maka

$$r(x) = \|x\|.$$

Bukti.

Aksioma- C^* mengakibatkan $\|x^*x\| = \|x\|^2$. Perhatikan juga bahwa xx^* adalah self-adjoint. Dengan demikian diperoleh $\|(x^*x)^2\| = \|x^*x\|^2 = \|x\|^4$. Dengan induksi matematika diperoleh $\|(x^*x)^{2^n}\| = \|x\|^{2^{n+1}}$.

$$\begin{aligned} r(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^{2n}\|^{2^{-n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^{2n}\|^{2^{-(n-1)+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|((x^*)^{2n} x^{2n})^{2^{-n-1}}\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|((x^*x)^{2n})^{2^{-n-1}}\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|(x^*x)^{2^{-1}}\| \\ &= \|x^*x\|^{\frac{1}{2}} \\ &= (\|x\|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|x\|. \end{aligned}$$

Definisi 17. (Aljabar- C^* satuan dan komutatif)

Suatu aljabar- C^* disebut **aljabar- C^* satuan** jika memiliki elemen satuan. Jika A adalah aljabar- C^* dalamnya berlaku sifat komutatif perkalian yakni,

$$xy = yx$$

disebut **aljabar- C^* komutatif**.

Contoh 18.

1. $M_n(\mathbb{C})$ yakni himpunan semua matriks berukuran $n \times n$ adalah aljabar C^* dengan operator norm dan involusi Hermitian. Lebih lanjut $M_n(\mathbb{C})$ bukan merupakan aljabar- C^* komutatif, atau disebut aljabar- C^* nonkomutatif.

2. $C_0(X)$ adalah aljabar- C^* , dan merupakan aljabar- C^* komutatif.

Jika A adalah suatu aljabar- C^* , misalkan

$$\hat{A} = \{\phi: A \rightarrow \mathbb{C} \mid \phi \text{ adalah homomorfisma tak nol}\}.$$

Misalkan X kompak lokal dan $x \in X$, maka untuk $\phi_x: C_0(x) \rightarrow \mathbb{C}$, yang didefinisikan oleh

$$\phi_x(b) = b(x),$$

adalah suatu homomorfisma. Lebih lanjut, semua homomorfisma dari $C_0(x)$ adalah dalam bentuk ini.

Teorema 19.

Jika A adalah suatu aljabar- C^* komutatif, maka \hat{A} kompak lokal dalam topologi-lemah*. Lebih lanjut, A isomorfik dengan $C_0(\hat{A})$ terhadap pemetaan

$$f: A \rightarrow C_0(\hat{A}),$$

yang didefinisikan oleh

$$f_a(\phi) = \phi(a).$$

Bukti.

Sebagai catatan, perhatikan bahwa \hat{A} subhimpunan tertutup dari \mathbb{C}^A .

Jika A memiliki elemen satuan, maka setiap homomorfisma tak nol memiliki norm = 1. Berdasarkan teorema Alaoglu-Birkhoff, maka \hat{A} kompak dalam topologi-lemah*.

Jika A tidak memiliki elemen satuan

Teorema 20. (Gelfan-Naimark)

Setiap aljabar- C^* komutatif isomorfis dengan $C_0(X)$, dengan X adalah suatu ruang Hausdorff kompak.

Definisi 21. (Spektrum)

Misalkan A adalah suatu aljabar- C^* satuan. Untuk $a \in A$, **spektrum** didefinisikan oleh

$$sp(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda 1 - a \text{ tidak memiliki invers}\}.$$

Dapat dilihat bahwa $sp(a)$ merupakan subhimpunan kompak dari \mathbb{C} . Diaktakan a positif jika a self-adjoint dan $sp(a) \subseteq [0, \infty)$. Definisikan suatu urutan parsial pada anggota-anggota self-adjoint dengan $a \leq b$ jika dan hanya jika $a - b$ positif.

Misalkan A adalah suatu himpunan normal ($a \in A, a^*a = aa^*$), dan $C^*(a, 1)$ adalah subaljabar yang dibangun oleh a dan elemen satuan 1. Jika $\lambda \in sp(a)$, maka $\phi_\lambda(a) = \lambda$, secara tunggal mendefinisikan suatu homomorfisma- C^* dari $C^*(a, 1)$ ke \mathbb{C} .

Teorema 22.

$C^*(a, I)$ adalah Aljabar- C^* dan isomorfik dengan $C(sp(a))$.

Bukti.

Jelas bahwa $C^*(a, I)$ adalah aljabar- C^* .

Misalkan $C^*(a, I) = X$, maka untuk setiap $\phi \in \hat{B}$ secara tunggal ditentukan oleh $\lambda_\phi = \phi(a)$. Lebih lanjut, $\phi(a) = \lambda$, perhatikan bahwa hal ini mengakibatkan $\phi(\lambda 1 - a) = 0$, dengan demikian $\lambda_\phi \in sp(a)$.

Selanjutnya, perhatikan juga untuk Pemetaan $C^*(a, 1)$ ke $C(sp(a))$; $(b \mapsto f_b)$, dimana $f_b(\lambda) = \phi_\lambda(b)$.

Jika $b = p(a, a^*)$; dengan p polinomial dua variabel koefisien kompleks, maka $\lambda \mapsto f_b(\lambda) = p(\lambda, \bar{\lambda})$ kontinu, lebih lanjut kontinu untuk setiap b . Pemetaan $b \mapsto f_b$ ini adalah suatu homomorfisma- $*$ dan kontinu.

Dengan demikian merupakan fungsi pada karena untuk setiap $\lambda \in sp(a)$ secara tunggal mendefinisikan $\phi_\lambda \in \hat{B}$

Akibat 23.

Jika a normal, maka $\|a\| = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in sp(a)\}$.

Bukti.

Dari teorema sebelumnya maka dapat dilihat bahwa $f(a) \in A$ untuk setiap a normal dan $f: sp(a) \rightarrow \mathbb{C}$ kontinu.

Perhatikan bahwa

$$\lambda 1 - f(a) = (\lambda - f)(a),$$

Dengan demikian $sp(f(a)) \subseteq \text{range}(f)$. Lebih khusus, jika $\text{range}(f) \subseteq [0, \infty)$, maka $f(a)$ positif. Kemudian karena a^*a selalu normal dan positif, definisikan

$$|a| = \sqrt{(a^*a)}$$

untuk setiap $a \in A$.

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan di atas, kesimpulan yang dapat diambil yakni, Suatu aljabar- C^* disebut **aljabar- C^* komutatif** jika dalamnya berlaku sifat komutatif perkalian. Selain itu, setiap aljabar- C^* komutatif isomorfis dengan $C_0(X)$, dengan X adalah suatu ruang Hausdorff kompak. Lebih lanjut, dengan menggunakan transformasi Gelfand konsep aljabar- C^* dapat ditinjau lebih luas lagi terutama untuk aljabar- C^* nonkomutatif.

DAFTAR PUSTAKA

- Arveson, William, An Invitation to C^* -algebra, Springer-Verlag, New York, 1976, Graduate Text in Mathematics, No. 39.
- Davidson, Kenneth R, (1996) C^* -algebras by example, Fields Institute Monographs, vol.6, American Mathematical Society, Providence, RI,
- Doran, Robert S; Belfi, Victor A. (1986), Characterization of C^* -algebras: The Gelfand-Neimark Theorems, CRC press
- Emch, G. (1972) Algebraic Methods in Statistical Mechanics and Quantum Field Theory, Wiley-Interscience
- Landsman, N. P. (2003) Lectures Notes on C^* -Algebras and K-Theory. Korteweg-de Vries Institute for Mathematics University of Amsterdam.
- Lin, Huaxin, An Introduction to the classification of Amenable C^* -algebras. World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd
- Neumann, J. Von. (1961) Collected works. Vol.III. Rings of Operator, Pergamon Press, New York
- Farah, Ilijas. C^* -Algebras and Their Representations
- Rickart, C. E. (1946) Banach Algebras with an Adjoint Operation. Ann. Of. Math (2) 47:528-550